



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**OPTIMALIZACE ŽELEZNIČNÍ DOPRAVY ODPADŮ**

OPTIMIZATION OF RAIL WASTE TRANSPORTATION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Anna Ambrozková**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Martin Pavlas, Ph.D.**

**BRNO 2016**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Studentka: **Anna Ambrozková**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Martin Pavlas, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Optimalizace železniční dopravy odpadů

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Z důvodu ekologie dopravy bývá v řadě případů vyžadována železniční přeprava surovin a materiálu. Bakalářská práce bude zaměřena na optimalizaci dopravy po železnici v rámci tzv. reverzních úloh, kdy se např. odpad od více producentů dopravuje do místa jeho konečného zpracování. Úkolem studenta je návrh vhodného matematického modelu pro řešení daného problému. V aplikační části bude posouzena železniční doprava odpadu na území ČR z pohledu ekonomické náročnosti. V průběhu zpracování bude úloha konzultována se specialistou na optimalizaci z Ústavu matematiky (Ing. Jakub Kúdela).

Úloha je motivována činnostmi strategického projektu TAČR "Centrum kompetence pro energetické využití odpadů" řešeného na Ústavu procesního inženýrství a projektu NETME Centre PLUS řešeného na Fakultě strojního inženýrství.

### Cíle bakalářské práce:

- Studium teoretických poznatků v oblasti matematického modelování toků v síti se zaměřením na tzv. reversní úlohy.
- Základní porozumění problematice železniční dopravy.
- Formulace problému a návrh matematického modelu.
- Ověření funkčnosti modelu na jednoduché úloze.
- Testování využitelnosti modelu na reálných datech.

**Seznam doporučené literatury:**

BING, Xiaoyun, BLOEMHOF, Jacqueline M., RAMOS, Tânia Rodrigues Pereira, BARBOSA-POVOA, Ana Paula Ferreira Dias, WONG, Chee Yew and Van Der Vorst, Jack Gaj A J, 2016. Research challenges in municipal solid waste logistics management. Waste Management, Volume 48, pp. 584-592.

GHIANI, Gianpaolo., LAPORTE, Gilbert and MUSMANNO, Roberto, 2004. Introduction to Logistics Systems Planning and Control. New York: John Wiley and Sons.

BAZARAA, Mokhtar, JARVIS, John and SHERALI, Hanif, 2010. Linear Programming and Network Flows. New York: Wiley and Sons.

WILLIAMS, Paul H., 1993. Model Building for Mathematical Programming. New York: Wiley and Sons.

GAMS Modelling Language Manuals, 2015.

KLAPKA, Jindřich, DVOŘÁK, Jiří a POPELA, Pavel, 2001. Metody operačního výzkumu, Brno.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá optimalizací železniční dopravy odpadů. Teoretická část je věnována teorii grafů a optimalizaci, kde zmiňujeme například reprezentaci grafů, toky v sítích nebo lineární programování. V praktické části se pak zaměřujeme na porovnání silniční a železniční sítě, motivační příklad a aplikaci na reálných datech v celé České republice.

## **Abstract**

The bachelor thesis focuses on optimization of rail waste transportation. Theoretical part is about graph theory and optimization, where is introduced for example representation of graphs, network flows or linear programming. Practical part deals with comparison of road and rail networks, motivational example and at least with the application on real data of whole Czech Republic.

## **klíčová slova**

Teorie grafů, optimalizace, matematické modelování, toky v sítích, železniční doprava

## **keywords**

Graph theory, optimization, mathematical modeling, network flows, rail transport

Ambrozková, A.: *Optimalizace železniční dopravy odpadů*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Martin Pavlas, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Optimalizace železniční dopravy odpadů* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Martina Pavlase, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Anna Ambrozková





Děkuji svému vedoucímu Ing. Martinu Pavlasovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat za veškerý čas a ochotu, kterou mi věnoval při konzultacích, Ing. Radovanu Šomplákovi, Ph.D. a Ing. Vlastimírovi Nevrlému. V neposlední řadě bych chtěla také poděkovat Ing. Jakubu Kůdelovi a RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D., kteří věnovali svůj čas na úpravu matematické části. Děkuji i Ing. Jiřímu Gregorovi za informace ohledně dopravních sítí. Především ale děkuji našemu Bohu, že se mnou byl (a stále je) celou dobu a dodával mi dost sil a trpělivosti při psaní této práce.

Anna Ambrozková



# Obsah

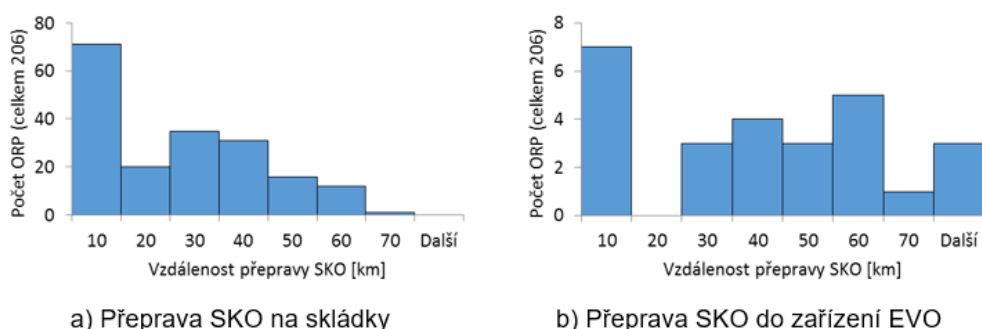
<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teorie grafů</b>	<b>4</b>
2.1	Základní pojmy . . . . .	4
2.2	Reprezentace grafů . . . . .	6
2.3	Toky v síti . . . . .	7
2.4	Nejkratší cesta . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Optimalizace</b>	<b>9</b>
3.1	Lineární programování . . . . .	9
3.2	Celočíselné úlohy . . . . .	10
3.3	Problematika lokálního extrému . . . . .	10
3.3.1	Weierstrassova věta . . . . .	10
3.3.2	Konvexnost . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Modely</b>	<b>12</b>
4.1	Definice problému . . . . .	12
4.1.1	Silnice . . . . .	12
4.1.2	Železnice . . . . .	14
4.2	Matematický model . . . . .	14
4.3	Motivační příklad . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Aplikace na reálných datech v ČR</b>	<b>19</b>
5.1	Silnice . . . . .	19
5.2	Železnice . . . . .	19
5.3	Aplikace na ČR . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Diskuze</b>	<b>22</b>
6.1	Cena . . . . .	22
6.1.1	Silnice . . . . .	22
6.1.2	Železnice . . . . .	22
6.2	Produkce/kapacity . . . . .	22
6.3	Čas . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>23</b>
	<b>Literatura</b>	<b>24</b>

# 1 Úvod

Odpadové hospodářství v EU prochází v posledním období transformací. Vláda České republiky na konci roku 2014 schválila nový Plán odpadového hospodářství ČR (POH ČR) pro období 2015 - 2024. Strategie navržená v POH ČR vede jednoznačně k odklonu odpadů ze skládek díky předcházení vzniku odpadů, zlepšení recyklace a materiálového využití odpadů a tím i k přechodu na oběhové hospodářství. Plán se zaměřuje také na upřednostnění způsobů nakládání s odpady podle celoevropské odpadové hierarchie a plnění evropských cílů ve všech oblastech nakládání s odpady. Z tohoto plánu vyplývá i nezbytnost stanovit a koordinovat síť zařízení k nakládání s odpady v regionech. Na POH ČR přímo navazuje nový programový dokument Operačního programu Životního prostředí 2014 - 2020, díky němuž bude možné čerpat finance na podporu nových zařízení a systémů nakládání s odpady [1].

Celý zpracovatelský řetězec se skládá ze svozu, přepravy a zpracování odpadů. Podle zákona č. 185/2001 Sb., ustanovením § 3 odst. 1 je odpad definován jako každá movitá věc, které se osoba zbavuje nebo má úmysl nebo povinnost se jí zbavit [2].

Tato bakalářská práce se bude zaměřovat na část, která se zabývá dopravou odpadů. Z pohledu základního dělení uvažujeme využití silniční a železniční dopravy. Oba typy mají své specifické charakteristiky, kterým je věnována čtvrtá a pátá kapitola, a je třeba je zahrnout v matematickém modelu. Dnes převažuje skládkování komunálních odpadů. Dle dat z roku 2014 v ČR skončilo na skládkách 48,5% komunálního odpadu [3]. V roce 2010 se na území ČR nacházelo 150 skládek ostatních odpadů (S-OO) [4]. Na území téměř každé obce s rozšířenou působností (dále jen ORP) je skládka. V dnešní době je odpad v ČR přepravován výhradně po silnici, přičemž dopravní vzdálenosti jsou krátké, viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1 Vzdálenost přepravy směsného komunálního odpadu pro ORP [5]

Lze vidět, že vzdálenosti z ORP na skládky jsou výrazně kratší, než do zařízení EVO (Energetické využití odpadů). Od roku 2024 bude v ČR zákaz skládkování, který je například již nyní zakotven v POH ČR 2015 - 2024 [4]. To povede k nutné změně infrastruktury, protože se vzdálenosti přepravy směsného komunálního odpadu (dále jen SKO) prodlouží. V zahraničí je vyvíjena i doprava po železnici. Zvláště v Německu a Rakousku mají velmi propracovaný systém EVO [6]. Zejména v Německu se často řeší problematika s nadkapacitou EVO zařízení, které trpí nedostatkem odpadu. Časté výkyvy v dodávce odpadu jsou komplikované pro plánování vyráběných komodit (pára, elektrina, teplo) a tedy i ekonomicky nepřípustné. V současnosti se v ČR nachází 4 zařízení EVO, což by se mělo v budoucnosti rozšířit. Cílem této práce je sestavení matematického modelu,

který bude schopen vyhodnotit oba typy dopravy. Výstupem bude návrh optimálního dopravního modelu pro zbytkové komunální odpady na datech ČR.

Druhá a třetí kapitola bude zaměřena na teoretický úvod z oblasti teorie grafů a optimalizace. Následovat bude definice problému spolu s návrhem matematického modelu, který bude implementován do prostředí GAMS (The General Algebraic Modeling System - modelovací systém s vlastním programovacím jazykem, určený pro řešení optimalizačních úloh). Funkce modelu bude ověřena na zjednodušeném motivačním příkladu. Na závěr bude tato úloha převedena na reálná data celé ČR.

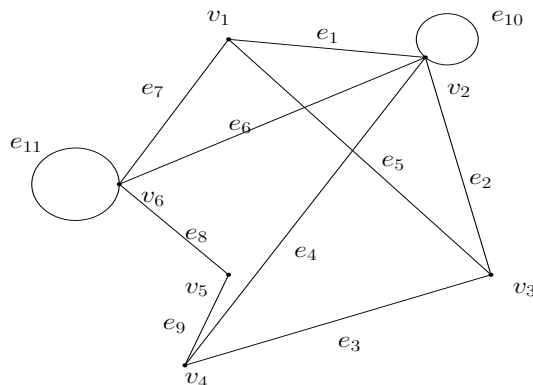
## 2 Teorie grafů

Tato kapitola pojednává o *teorii grafů*. Vysvětlí se zde několik základních pojmů, ukáže se grafická reprezentace, která bude využita například pro popis toku. Teorii byla čerpána z [7] a [8].

### 2.1 Základní pojmy

**Definice 2.1** *Graf* je základním pojmem teorie grafů. Používá se ke grafickému znázornění množiny, u které chceme ukázat, že jsou některé prvky propojeny. Graf obecně je popsán dvěma množinami, a to *množinou vrcholů*  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  a *množinou hran*  $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , které spojují některé nebo všechny vrcholy. Graf  $G$  je pak jednoznačně určen uspořádanou dvojicí  $(V, E)$ .

**Definice 2.2** *Neorientovaný graf* je tvořen uspořádanou trojicí  $(V, E, \epsilon)$ , kde  $V$  představuje neprázdná množina vrcholů,  $E$  konečnou množinu hran a  $\epsilon$  zobrazení  $E \rightarrow V^2$ . Zobrazení  $\epsilon$  přiřazuje každé hraně  $e \in E$  jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinu uzlů. Je-li množina  $\epsilon(e)$  jednoprvková, nazýváme hranu  $e$  neorientovanou smyčkou. Ukázku tohoto grafu můžeme vidět na obrázku 2.1.

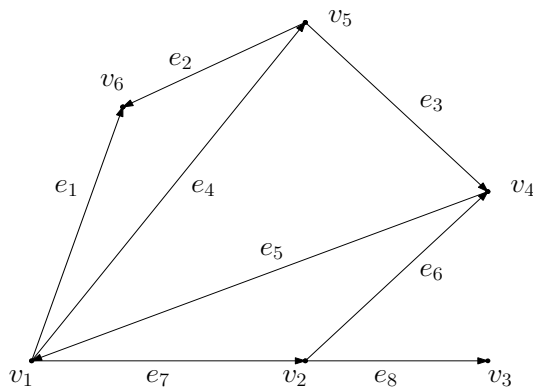


Obrázek 2.1: Neorientovaný graf se smyčkami

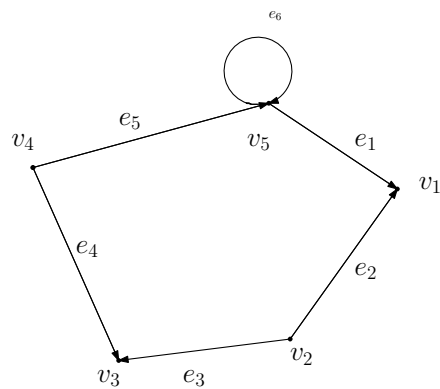
**Definice 2.3** *Orientovaný graf* je tvořen uspořádanou trojicí  $(V, E, \epsilon)$ , kde  $V$  představuje neprázdná množina vrcholů,  $E$  konečnou množinu hran a  $\epsilon$  zobrazení  $E \rightarrow V^2$ .

Takovéto zobrazení  $\epsilon$  přiřazuje každé hraně  $e \in E$  uspořádanou dvojici *vrcholů*  $(x, y)$ ,  $x, y \in V$ . První z nich nazýváme počátečním vrcholem hrany  $e$  a značíme jej  $v_p(e)$ , druhý nazýváme koncovým vrcholem hrany  $e$  a značíme jej  $v_k(e)$ . Říkáme pak, že hrana  $e$  vede z vrcholu  $x$  do vrcholu  $y$ . Jestliže  $v_p(e) = v_k(e)$ , říkáme, že hrana  $e$  je orientovanou smyčkou.

Orientovaný graf se může dělit na prostý orientovaný graf a obyčejný orientovaný graf, ve kterém zobrazení  $\epsilon$  přiřazuje každé hraně  $e \in E$  uspořádanou dvojici *vrcholů*  $(x, y)$  takových, že  $x \neq y$ . Prostý orientovaný graf je takový, v němž násobnost každé hrany je nejvýše rovna jedné (nemůže vést hrana z  $x$  do  $y$  a současně z  $y$  do  $x$ ). Ukázku těchto grafů můžeme vidět na následujících obrázcích 2.2, 2.3.



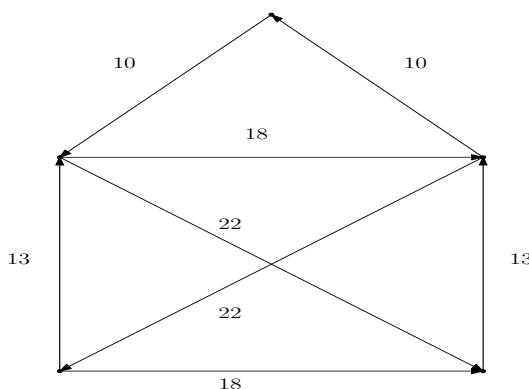
Obrázek 2.2: Obyčejný orientovaný graf



Obrázek 2.3: Prostý orientovaný graf

**Definice 2.4** Orientovaný graf  $G$  spolu s reálnou funkcí  $w: E(G) \rightarrow (0, \infty)$  nazýváme *ohodnocený orientovaný graf*  $(G, w)$  nebo též *síť*. Je-li  $h$  hrana grafu  $G$ , pak číslu  $w(h)$  říkáme její *ohodnocení* nebo *váha*.

Takový graf si můžeme prohlédnout na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Ohodnocený orientovaný graf

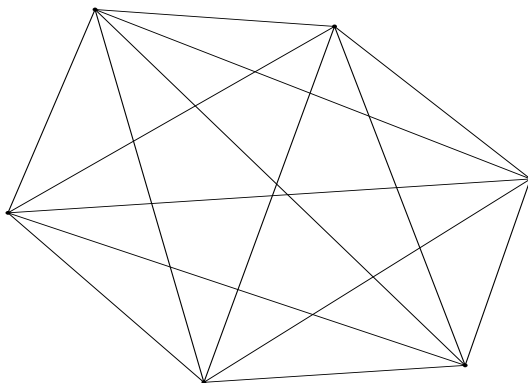
**Definice 2.5** Necht'  $G = (V, E, \epsilon)$  je orientovaný graf a  $x$  a  $y$  jsou jeho libovolné vrcholy. Pak zavedeme následující pojmy a značení:

- $V^+(x) = \{z \in V \mid (x, z) \in \epsilon(E)\}$  je *množina následníků vrcholu  $x$* , tj. množina vrcholů, do nichž vede hrana z  $x$ .
- $V^-(x) = \{z \in V \mid (z, x) \in \epsilon(E)\}$  je *množina předchůdců vrcholu  $x$* , tj. množina vrcholů, z nichž vede hrana do  $x$ .
- $V(x) = V^+(x) \cup V^-(x)$  je *množina sousedů vrcholu  $x$* , tj. množina vrcholů spojených hranou s vrcholem  $x$ .
- $E^+(x) = \{e \in E \mid v_p(e) = x\}$  je *výstupní okolí vrcholu  $x$* , tj. množina hran s počátečním vrcholem  $x$ .
- $E^-(x) = \{e \in E \mid v_k(e) = x\}$  je *vstupní okolí vrcholu  $x$* , tj. množina hran s koncovým vrcholem  $x$ .

- $\deg^+(x) = |E^+(x)|$  je *výstupní stupeň vrcholu*  $x$ , tj. počet hran vystupujících z vrcholu  $x$ .
- $\deg^-(x) = |E^-(x)|$  je *vstupní stupeň vrcholu*  $x$ , tj. počet hran vstupujících do vrcholu  $x$ .

**Definice 2.6** Řekneme, že graf  $G = (V, E, \epsilon)$  je *úplný*, jestliže pro každé dva vrcholy  $v_i, v_j \in V, i \neq j$ , existuje alespoň jedna hrana  $e$ , která je spojuje. Má-li tento graf  $n$  uzlů, značíme jej  $U_n$

Ukázka úplného grafu je na obrázku 2.5:



Obrázek 2.5: Úplný graf  $U_6$

## 2.2 Reprezentace grafů

Dosud jsme popisovali všechny grafy pomocí obrázků. Často ale musíme grafy popsat pomocí čísel, což je důležité například pro výpočty na počítači. My se budeme v této práci zabývat především dvěma typy, které se zapisují pomocí matic.

**Definice 2.7** Necht'  $G = (V, E)$  je graf s  $n$  vrcholy. Označme vrcholy  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . *Matice sousednosti* grafu  $G$  je čtvercová matice  $A = [a_{ij}]$  dána předpisem:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Jestliže jsou hrany grafu  $G$  ohodnoceny, pak místo jedniček používáme v matici délku hrany tvořenou dvojicí  $(x_i, x_j)$  a nazýváme ji *maticí vzdáleností* nebo též *distanční matice*. V naší práci bude ohodnocení grafu bráno ve smyslu vzdáleností.

**Příklad 2.1** Matice sousednosti z obrázku 2.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



**Definice 2.8** Necht' graf  $G$  je orientovaný graf bez smyček. Pak můžeme graf popsat maticí, která se nazývá *incidenční*. Ke konstrukci této matice je nutné stanovit jisté pořadí vrcholů (neboli uzlů)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  i hran  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Incidenční matice  $B = (b_{i,j})_{n,m}$ , je pak dána předpisem:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncový uzel hrany } e_j, \\ -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počáteční uzel hrany } e_j, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

**Příklad 2.2** Incidenční matice z obrázku 2.2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Toky v síti

Ohodnocený orientovaný graf, neboli síť je libovolný orientovaný graf  $G = (V, E)$  s ohodnocením  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , které nazýváme *kapacitou*. Název síť se používá proto, že velice pěkně odráží problémy, které se pomocí ní řeší. A to zejména dopravní problémy [6], problémy spojené s minimalizací přepravních nákladů aj.

**Definice 2.9** *Cestu* v grafu chápeme jako posloupnost vrcholů a hran  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t)$ , kde vrcholy  $v_0, v_1, \dots, v_t$  jsou navzájem různé vrcholy grafu  $G$  a pro každé  $i = 1, 2, \dots, t$  je  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ .

**Definice 2.10** Necht'  $G$  je síť s kapacitou  $w$ . Necht'  $a, b$  jsou pevně zvolené vrcholy grafu  $G$ . Zobrazení  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  nazveme *tokem velikosti*  $C$  z  $a$  do  $b$ , jestliže pro každý vrchol  $x \in V$ ,  $x \neq a$ ,  $x \neq b$ , a pro každou hranu  $(y, z) \in E$  platí:

$$\begin{aligned} f(y, z) &\leq w(y, z), \\ \sum_{e \in E^-(x)} f(e) &= \sum_{e \in E^+(x)} f(e), \end{aligned} \tag{2.1}$$

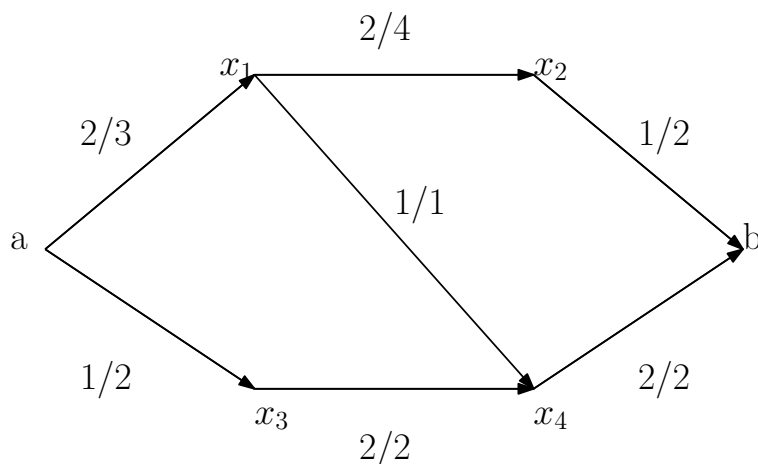
$$C = \sum_{e \in E^-(a)} f(e) - \sum_{e \in E^+(b)} f(e)$$

Základem algoritmizace pro nalezení toku maximální velikosti z  $a$  do  $b$  sítě  $G$  s nezápornou kapacitou  $w$  je následující věta:

**Věta 2.1** Tok  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  je maximálním tokem z  $a$  do  $b$  v síti  $G$  s kapacitou  $w$ , právě když neexistuje cesta  $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ , pro niž platí:

$$\begin{aligned} f(x_i, x_{i+1}) &< w(x_i, x_{i+1}), \text{ pokud } (x_i, x_{i+1}) \in E(P), \\ f(x_{i+1}, x_i) &> 0, \text{ pokud } (x_{i+1}, x_i) \in E(P). \end{aligned}$$

**Příklad 2.3** Na následujícím obrázku je znázorněna síť. U každé hrany  $e$  je uvedeno  $f(e)/w(e)$ :



Obrázek 2.6: Tok v síti

Velikost maximálního toku v síti na obrázku 2.6 je 3.

## 2.4 Nejkratší cesta

Nejkratší cesta je taková posloupnost hran ohodnocených reálným číslem  $a(e)$  představující vzdálenost, po které se dostaneme z počátečního vrcholu  $v_i$  do koncového  $v_j$  nejmenší možnou délkou.

**Definice 2.11** *Délka cesty* je součet délek jednotlivých hran, které ji tvoří. Necht'  $v_i, v_j$  jsou vrcholy grafu. Pak *vzdálenost*  $d_{ij}$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$  definujeme jako délku nejkratší cesty mezi vrcholy  $v_i$  a  $v_j$ , jestli taková cesta existuje. Jestliže neexistuje, definujeme  $d_{ij} = \infty$ .

Funkci  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme také *metrikou* grafu  $G$  a má následující vlastnosti:

1.  $d_{ij} \geq 0$  pro všechna  $v_i, v_j \in V$  a  $d_{ij} = 0$  jen když  $v_i = v_j$ ,
2.  $d_{ij} = d_{ji}$  pro všechna  $v_i, v_j \in V$ ,
3.  $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$  pro všechna  $v_i, v_j, v_k \in V$ .

### 3 Optimalizace

Optimalizační modely, neboli matematické programy, představují řešení problému, jak zvolit hodnoty důležitých proměnných při hledání maxima nebo minima účelové funkce vzhledem k omezením zahrnujícím proměnné.

Optimalizační modely se dělí na *deterministické* a *stochastické*. Deterministické narozdíl od stochastických používají veškerá data s určitostí. Naše vstupy jsou tedy konstanty. Realitě se více přibližují stochastické. Deterministické modely ale používáme z hlediska jejich jednoduchosti a výsledky jejich řešení zůstávají i přesto aplikovatelné.

Pokud řešení vyhovuje všem omezením, nazýváme ho *přípustné*. *Optimální řešení* úlohy je pak přípustné řešení, které maximalizuje nebo minimalizuje účelovou funkci.

Informace byly čerpány z [9] a [10].

#### 3.1 Lineární programování

Zabývá se různými problémy, které souvisí s hledáním vázaných extrémů lineárních funkcí více proměnných. Podmínky, které je omezují, mají tvar lineárních rovnic a nerovností.

Úlohy se zabývají například nějakou továrnou, která vyrábí  $x$  druhů výrobků. Ty se vytváří z  $y$  surovin, kterých je omezené množství. Každý výrobek má jinou cenu a úkolem je zpravidla sestavit takový denní výrobní program, při kterém hodnota výroby bude maximální. Dá se k tomu přidat i některé omezení. Například, že výrobku  $x_i$  musí být vyrobeno přesné množství či váha.

**Definice 3.1** Optimalizační model je v *lineární formě*, jestliže má spojitě proměnné, lineární účelovou funkci, a všechna omezení jsou buď lineární rovnice nebo nerovnosti.

**Příklad 3.1** Obecná formulace úlohy lineárního programování

*Minimalizovat*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3.1}$$

*za podmínek*

$$\begin{aligned} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n &= t_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots + m_{2n}x_n &= t_2 \\ &\vdots \\ m_{m1}x_1 + m_{m2}x_2 + \dots + m_{mn}x_n &= t_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

**Poznámka** Místo rovnic zde mohou být i nerovnice.

Pomocí maticovo-vektorového zápisu lze formulaci úloh přepsat do tvaru:

*Minimalizovat*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.2}$$

*za podmínek*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{x} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

nebo stručněji

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{t}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

## 3.2 Celočíselné úlohy

U lineárních úloh mohly rozhodovací proměnné nabývat libovolných reálných hodnot. Nyní do těchto úloh přidáme i požadavky na celočíselnost. Tím dostáváme úlohy *celočíslného programování*.

**Příklad 3.2** Obecná formulace celočíselné úlohy

*Minimalizovat*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*za podmínek*

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m,$$

(3.3)

$$x_j \in M_j \subseteq \mathbb{Z}, j \in J$$

kde  $J \neq \emptyset$ ,  $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  a  $\mathbb{Z}$  je množina celých čísel.

Celočíselné úlohy dělíme podle typu funkcí  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  na *lineární* a *nelineární*.

**Definice 3.2** Jestliže jsou podmínkou celočíselnosti vázány všechny proměnné, tedy  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ , říkáme, že je to *úplná (ryze) celočíselná* úloha. Pokud se týká jen některých proměnných, tedy  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , mluvíme o *částečně (smíšeně) celočíselné* úloze.

## 3.3 Problematika lokálního extrému

Problematika optimalizačních metod zahrnuje vyhledávání extrémů reálných funkcí a proměnných. Účinné metody pro nalezení globálního extrému existují pouze pro úlohy s konvexními funkcemi. Nekonvexní úlohy mají totiž zpravidla více lokálních extrémů.

### 3.3.1 Weierstrassova věta

**Věta 3.1** Funkce spojitá na *uzavřeném intervalu*  $I$  je na tomto intervalu *ohraničena*.

**Věta 3.2** Funkce spojitá na *uzavřeném intervalu*  $I$  nabývá svého *minima* a *maxima*, tj. v intervalu  $I$  existují body  $x_{\min}, x_{\max}$  takové, pro které platí, že  $f(x_{\min}) = \min\{f(x) \mid x \in I\}$ ,  $f(x_{\max}) = \max\{f(x) \mid x \in I\}$ .

### 3.3.2 Konvexnost

**Definice 3.3** Necht'  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že množina  $S$  je *konvexní*  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \forall \lambda \in (0,1): \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ .

**Definice 3.4** Necht'  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$  je konvexní množina,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je konvexní na množině  $S \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1):$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad (3.4)$$

Řekneme, že funkce  $f$  je *striktně konvexní* na množině  $S \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in (0,1):$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad (3.5)$$

Řekneme, že funkce  $f$  je *konkávní* (*striktně konkávní*)  $\Leftrightarrow -f$  je *konvexní* (*kvazikonvexní*) na množině  $S$ .

**Definice 3.5** Necht'  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$ , je konvexní množina. Funkce  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *kvazikonvexní funkcí na  $S$*   $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1):$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}. \quad (3.6)$$

Funkce  $f$  se nazývá *kvazikonkávní*  $\Leftrightarrow -f$  je *kvazikonvexní*.

**Definice 3.6** Necht'  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $S \neq \emptyset$ , je konvexní množina. Funkce  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní na množině  $S$ . Necht'  $\bar{x} \in \operatorname{arglocmin}_x \{f(x) \mid x \in S\}$ . Potom  $\bar{x} \in \operatorname{argglobmin}_x \{f(x) \mid x \in S\}$ . Jestliže  $\bar{x}$  je striktní lokální minimum ( $\bar{x} \in \operatorname{argstrictlocmin}_x \{f(x) \mid x \in S\}$ ) nebo funkce  $f$  je striktně konvexní na množině  $S$ , potom je  $\bar{x}$  jedinečné globální minimum funkce  $f$  na množině  $S$  (a izolované lokální minimum).

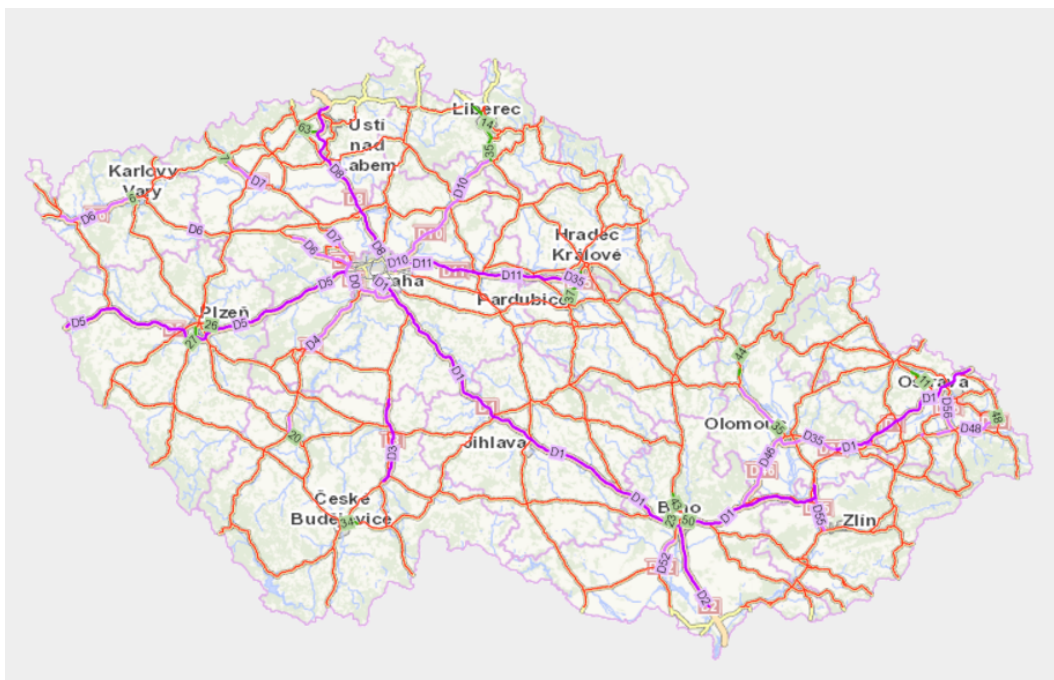
## 4 Modely

### 4.1 Definice problému

Průměrná produkce odpadu na člověka je stanovena přibližně na 3kg/týden [11]. Každé město, ve kterém se odpady sváží, není vždy schopno toto množství, které se může pohybovat od nuly po desítky či stovky tun, zpracovat. Z měst, která nejsou schopna odpad zpracovat, je třeba využít přepravy do jiného, co možno nejbližšího, místa zpracování. Je možné k tomu používat silniční nebo železniční dopravu. Cílem této práce je vytvořit matematický model, který bude zohledňovat charakteristiky dopravních sítí a sám zváží lepší volbu typu přepravy. Zabýváme se SKO, který se převážně nelisuje (lisováním se sníží objem a zvýší hmotnost na  $m^3$ ).

#### 4.1.1 Silnice

Silniční síť v ČR je poměrně hustá. Máme zde více typů - dálnice, rychlostní silnice a silnice I., II. a III. třídy. Délka dálnic v celé České republice je přibližně 1 222 km, délka silnic I. třídy přibližně 5 662 km [12]. Silniční síť je zobrazena na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1 Silniční dopravní síť [zdroj: [www.szdc.cz](http://www.szdc.cz)]

Čas

Průměrné rychlosti nákladních automobilů dle rychlostí GPS jsou ukázány v tabulce 4.1 [13].

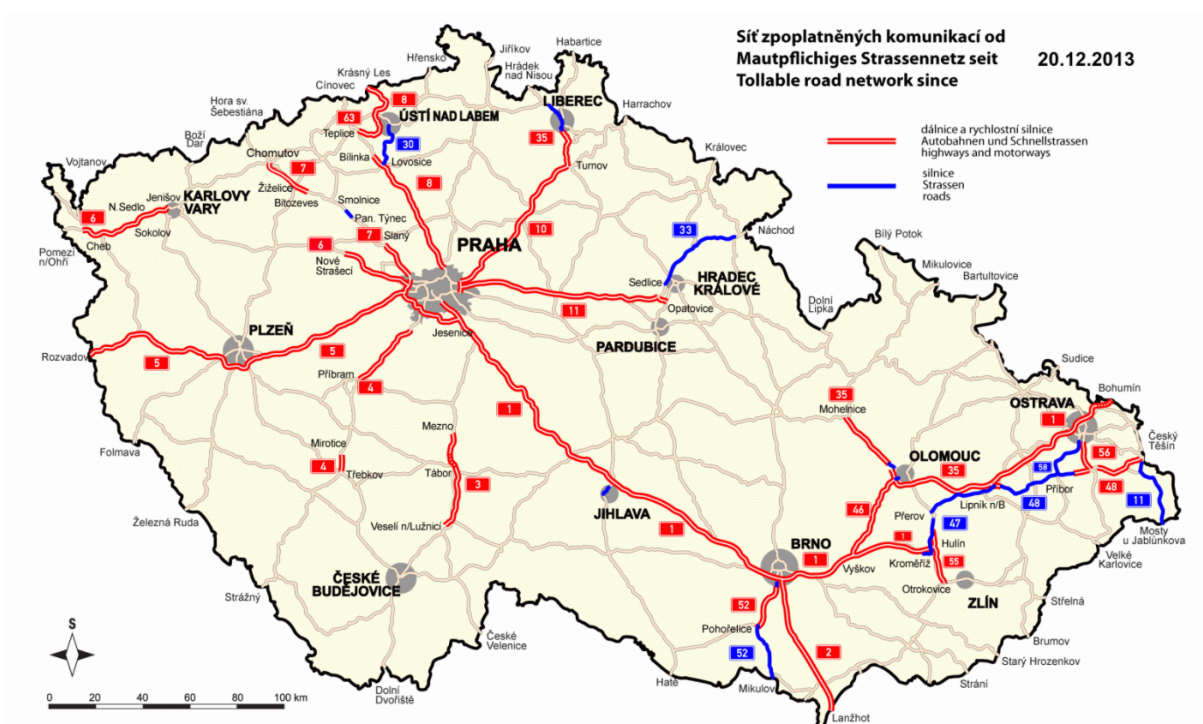
Typ komunikace	Rychlost GPS [km/h]
Dálnice a rychlostní komunikace	80
Silnice I. třídy	65
Silnice II. třídy	60
Silnice III. třídy	30
Vesnice	30
Město	30

Tabulka 4.1 Průměrné rychlosti nákladních automobilů

Provoz nákladních automobilů je omezen především pracovní dobou řidičů. K prodloužení jízdní doby může docházet i z důvodu zvýšené intenzity dopravy, nehod nebo prodloužení trasy. Při využití silnic nižších tříd je nutné zohlednit i mosty, které se vyznačují jen určitou nosností či určitým průjezdem.

#### Cena

Na dálnicích, vybraných úsecích silnic I. třídy, při použití mostu nebo tunelu se platí mýta. Výši mýtného stanovuje každoročně vláda ČR, přičemž nákladní vozidla jsou povinna vlastnit speciální elektronické zařízení **jednotku Premid**, která kontroluje a vypočítává výši mýtného při průjezdu mýtnou bránou. Cena se vyvíjí od počtu náprav, emisní třídy a dnů, kdy nákladní automobil využívá zpoplatněné komunikace [14]. Komunikace, které jsou v ČR zpoplatněny, vidíme na obrázku 4.2.

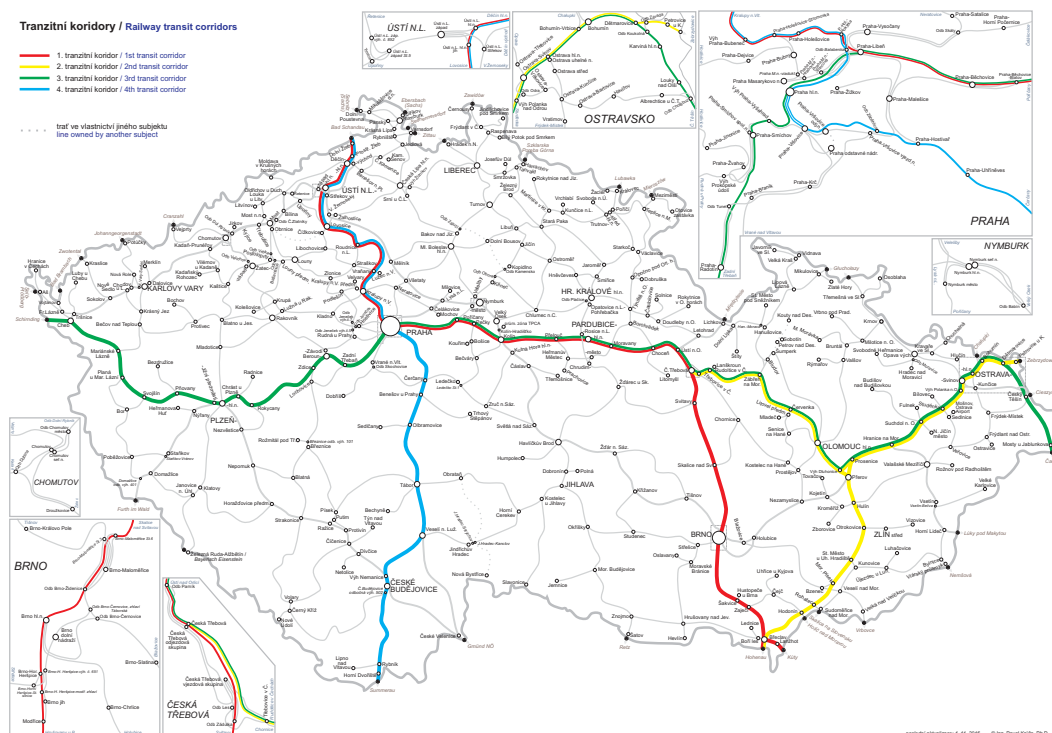


Obrázek 4.2 Mapa zpoplatnění v ČR platná k 20. 12. 2013 [15]

Dále sem patří například platy řidičů nebo nákup nových vozidel. Hrubá mzda řidiče je stanovena na 150 Kč/hod, mzda obsluhy na 120 Kč/hod [16]. Nové vozidlo vyjde přibližně na 3 mil Kč.

### 4.1.2 Železnice

Česká republika má jednu z nejvíce propacovaných a nejhustších železničních sítí v Evropě. Celkově se v ČR nachází 9 467 km železničních tratí, z toho je 3 218 elektrizovaných [17]. Železniční síť je zobrazena na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3 Železniční dopravní síť [zdroj: [www.ssmsk.cz](http://www.ssmsk.cz)]

#### Čas

Pracovní doba strojvedoucích provoz železnice omezuje jen okrajově. Největším časovým omezením je včasné pronajmutí trasy a tím vyčkání na dobu, kdy je trasa volná pro nákladní vlaky. Ty totiž nesmí brzdit vlaky osobní a expresní. Jsou vytížené koridory, u kterých se o pronajmutí trasy musí žádat rok dopředu. Existují ale i takové, u kterých je doba podávání žádostí o pronajmutí daleko kratší.

#### Cena

Na železnicích se vyskytuje jistá analogie mýt (viz kapitola 5.2), která jsou na silnicích. K tomu je nutno přičíst opět platy, pronajímání tras, nutné nákupy nových lokomotiv nebo případné penalizace za nevyužití trasy.

## 4.2 Matematický model

V matematickém modelu používáme účelovou funkci a pomocné rovnice. Pro silnici i železnici používáme stejnou incidenční matici. Tj. počítáme s tím, že do všech obcí s rozšířenou působností (dále jen ORP) vede také železnice (v Pohořelicích ve skutečnosti železniční stanice není). V modelu bylo zohledněno pronajímání lokomotiv, poplatky za naložení nákladu na vlak a odlišné dopravní náklady na silnici a železnici. Tyto částky byly zvoleny po konzultaci na Ústavu procesního inženýrství (dále jen ÚPI). V rovnicích bylo pracováno s následujícími množinami, parametry a proměnnými.



## Množiny

Symbol	Význam
--------	--------

i	uzly
j	hrany

## Parametry

Symbol	Význam	Jednotky
--------	--------	----------

$P_j^S$	dopravní náklady na silnici	Kč/km.t
$P_j^Z$	dopravní náklady na železnici	Kč/km.t
$P_i^h$	poplatek za zpracování	Kč/t
$P_i^b$	poplatek za naložení na vlak	Kč/t
$A_{ij}$	incidenční matice	-
$d_j$	vzdálenost	km
$c_i$	kapacita v uzlu i	t
$l_i$	produkce v uzlu i	t
$P_j^k$	poplatek za spuštění železniční hrany j	Kč/t
M	pomocný parametr s velkou hodnotou	t

## Binární proměnná

Symbol	Význam
--------	--------

$\delta_j$	indikátorová proměnná (slouží pro zapnutí/vypnutí hrany pro železnici)
------------	--

## Pozitivní proměnné

Symbol	Význam	Jednotky
--------	--------	----------

$x_j$	množství přepravované po silnici po hraně j	t
$y_j$	množství přepravované po železnici po hraně j	t
$g_i$	množství zpracovaného odpadu v uzlu i	t

Funkce a rovnice pak vypadají následovně:

### Účelová funkce

Účelová funkce vyjadřuje náklady spojené s nakládáním s odpady. Tj. náklady za jejich přepravu a zpracování.

$$\min z_T + z_R \quad (4.1)$$

$z_T$  (T jako transport) udává součet nákladů za dopravu po silnici i železnici.

$$z_T = \sum_{j=1}^n (P_j^S d_j x_j + P_j^Z d_j y_j), \quad (4.2)$$

$z_R$  (R jako rest) udává zbylé náklady. Tedy součet nákladů za zpracování, za pronajmutí železniční trasy a za naložení na vlak.

$$z_R = \sum_{i=1}^m P_i^h g_i + \sum_{j=1}^n \delta_j P_j^k + \sum_{j=1}^n y_j P_i^b, \quad (4.3)$$

### Omezení

Toto omezení zajišťuje hmotnostní bilanci v uzlech. Matice  $A_{ij}$  nám totiž najde všechny silnice, které vedou do nebo z uzlu  $i$ .

$$l_i + \sum_{j=1}^n x_j A_{ij} + \sum_{j=1}^n y_j A_{ij} - g_i = 0, \forall i \in I. \quad (4.4)$$

Další pomocná funkce nám ukazuje, že zpracování odpadu v uzlu  $i$  může být jen menší nebo rovna kapacitě v tomto uzlu.

$$g_i \leq c_i, \forall i \in I. \quad (4.5)$$

Poslední pomocná funkce slouží pro zapnutí/vypnutí železniční hrany. Parametr  $M$  je zvolené velké číslo, aby mohlo při zapnutí touto hranou "téct" velké množství odpadů.

$$\delta_j M \geq y_j, \forall j \in J, \quad (4.6)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\}, \forall j, \quad (4.7)$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in J, \quad (4.8)$$

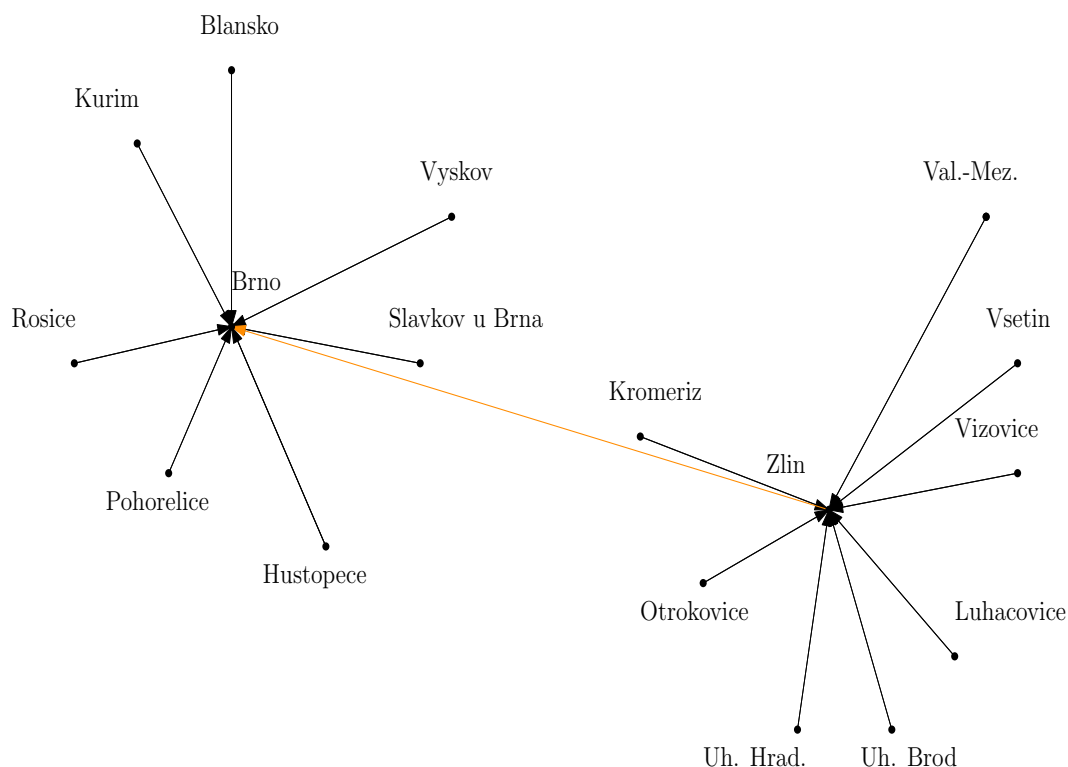
$$y_j \geq 0, \forall j \in J. \quad (4.9)$$

Rovnice (4.7) znázorňuje binární proměnnou  $\delta_j$ .

Rovnice (4.8) a (4.9) nám pouze udávají, že toky odpadů přes silnici či železnici nemohou nabývat záporných hodnot.

## 4.3 Motivační příklad

Pro motivační příklad bylo použito 17 ORP. Vybrán byl Zlín, Brno a jejich nejbližší ORP. Tuto síť jde vidět na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4 Motivační příklad

Část dat (vzdálenosti po silnici, produkce i kapacity) je reálných, zbylé jsou uměle vytvořené (cena za dopravu po silnici, železnici, za pronajmutí železniční trasy atd.). Reálná data jsou ukázána v tabulkách 4.2 a 4.3.

ORP	Vzdálenost do Brna [km]	Vzdálenost do Zlína [km]
Blansko	<b>29</b>	102
Kuřim	<b>12</b>	110
Rosice	<b>16</b>	115
Pohorelice	<b>39</b>	120
Hustopeče	<b>45</b>	122
Slavkov u Brna	<b>39</b>	87
Vyškov	<b>52</b>	66
Zlín	<b>114</b>	0
Val.-Mez.	135	<b>50</b>
Vsetín	142	<b>34</b>
Vizovice	127	<b>14</b>
Luhačovice	135	<b>23</b>
Uh. Brod	107	<b>31</b>
Uh. Hradiště	91	<b>27</b>
Otrokovice	106	<b>11</b>
Kroměříž	83	<b>33</b>

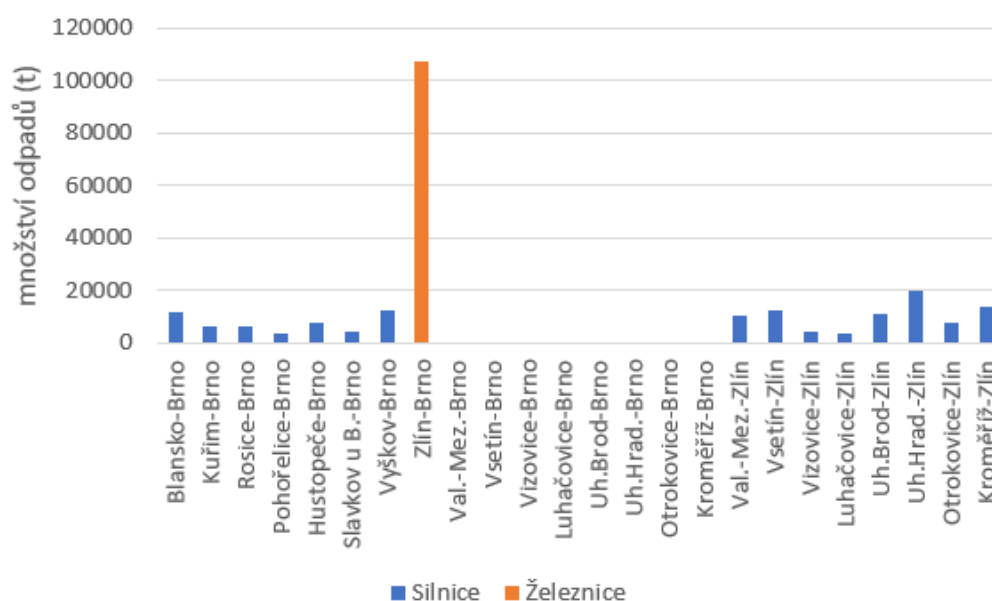
Tabulka 4.2 Vzdaľenosti

V motivačním příkladu byly uvažovány jen tyto vzdálenosti. Při větší aplikaci by byly použity i délky, které by vyjadřovaly spojení každého ORP s každým. Vzdálenosti, které byly použity pro přepravu odpadů jsou zvýrazněny tučně.

ORP	Produkce [t/rok]	Kapacita [t/rok]
Blansko	12032	0
Kuřim	6100	0
Rosice	6593	0
Pohořelice	3636	0
Hustopeče	7429	0
Slavkov u Brna	4299	0
Vyškov	12474	0
Brno	106582	360000
Zlín	24430	0
Val.-Mez.	10164	0
Vsetín	12760	0
Vizovice	4349	0
Luhačovice	3335	0
Uh. Brod	10823	0
Uh. Hradiště	20132	0
Otrokovice	7496	0
Kroměříž	13686	0

Tabulka 4.3 Produkce a kapacita

Model byl opakovaně testován pro různé kombinace cenových vstupů s cílem určit parametrickou citlivost výsledku. Konečný výsledek je vidět na obrázku 4.4. Opakovaným testováním se docílilo toho, že města sváží svůj odpad po silnici do nejbližšího krajského města (Brno, Zlín, černé šipky). Přitom jediné Brno má kapacitu na zpracování odpadů. Ze Zlína se pak svezené odpady vezou do Brna využitím železnice (oranžová šipka). Výsledky jsou zobrazeny ve sloupcovém grafu na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5 Přeprava odpadů po jednotlivých hranách

## 5 Aplikace na reálných datech v ČR

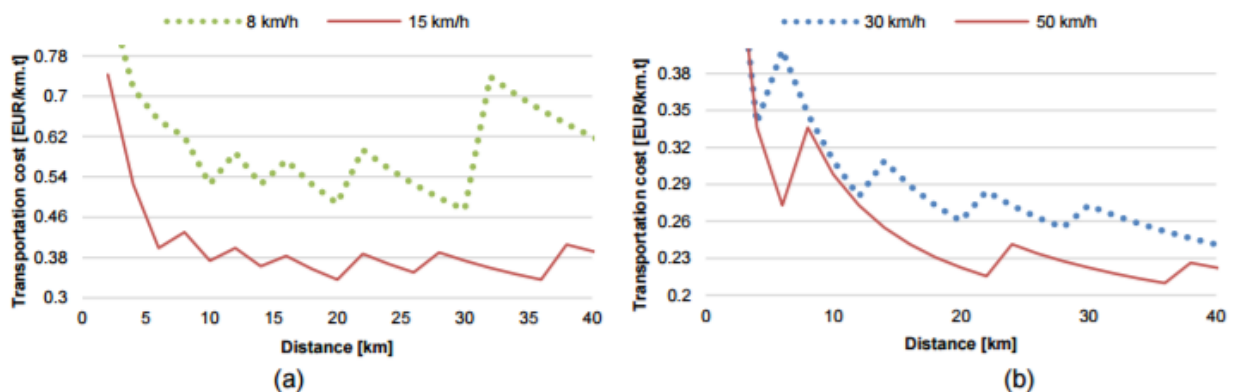
### 5.1 Silnice

Silniční doprava se v základu dělí na dvě části - svoz a odvoz. Svoz zahrnuje svážení odpadů ve městě, čili popeláři + odvážení do nějakého centrálního bodu. Odvozem se myslí přeprava odpadů do místa zpracování.

Z časového hlediska nákladní automobily nejsou nijak zvlášť omezovány. Pracovní doba je pro silnice stanovena na nějakých 40 hodin týdně, lehké omezení je v pátky a o víkendech. Na silnicích se platí mýta. V tuto chvíli jsou zpoplatněny dálnice, rychlostní třídy a některé části prvních tříd. Cena se odvíjí dle hmotnosti vozidla (s nákladem včetně), počtu náprav nebo emisní normy. Přibližně se uvádí cena 5Kč/km.

Omezení pro silnici, která můžeme uvažovat, jsou možné dopravní zácpy, most s nízkou nosností nebo s nízkou průjezdností.

Vývoj závislosti nákladů na množství odpadů a na vzdálenosti je definován přibližně mocninovou křivkou. Při maximálním využití jednoho auta jak z hlediska nákladů, tak z hlediska času, se náklady výrazně zmenší. Naopak, kdybychom při projíždění nějakým ORP museli přibrat další náklad, který by jen nepatrně přesahoval naši kapacitu a museli bychom tím pádem dokoupit další auto, zaplatit mzdu dalšímu řidiči apod., náklady by se skokově zvýšily, viz obrázek 5.1 [18].



Obrázek 5.1 Náklady na dopravu pro různé průměrné rychlosti a roční kapacitu 60kt

### 5.2 Železnice

Oproti silnicím má více nevýhod. Na kratší vzdálenosti je dražší, časově náročnější a méně dostupnější.

Vlaky mohou pojmout velké množství odpadů. Na jeden vagon se můžou vložit 2x 40-60m<sup>3</sup> kontejnery. Nejvyšší možné zatížení na jednu nápravu je v rámci ČR 22t. Nosnost traťových úseků na nápravu je od 14 do 22 tun. Je tedy nutné vybrat vhodnou trasu nebo vhodně naložit vlaky. Je třeba rozmyslet i celkovou trasu, zvláště v případech, které by mohly obsahovat úseky s většími sklony železničních tratí. Při rostoucí tažné síle lokomotivy totiž dochází k přeměně adhezního tření na smykové.

Co se týče času, nákladní vlaky musí dát přednost osobní a expresní dopravě. Cesty můžou využívat jen v době, kdy nebudou brzdit další vlaky. Většinou se musí dopředu zažádat o pronajmutí trasy pro konkrétní vlak. Při nevyužití se platí penále. To může nastat, když

bude produkce odpadů menší, než se předpokládalo. Tím by došlo k malému naplnění vlaku a k velké finanční ztrátě. Většinou v takových případech je výhodnější zaplatit dané penále. V tomto jde vidět velký rozdíl mezi silniční a železniční dopravou. Na silnici ve chvíli, kdy je naplněné auto, tak vyjede. Když se naplní vlak, musí vyčkat do svého času odjezdu, pokud vůbec může vyjet. Jsou ale i koridory, kde je čekací doba nižší nebo se nemusí trasy objednávat dlouho dopředu.

## Cena

Výpočet ceny  $C$  [Kč] za využití železniční dopravní cesty je dán vztahem:

$$C = C_1 + C_2, \quad (5.1)$$

kde  $C_1$  [Kč] je cena za použití dráhy pro jízdu vlaku v segmentu výkonů měřených ujetými vlakovými kilometry a  $C_2$  [Kč] je cena za použití dráhy pro jízdu vlaku v segmentu výkonů měřených hrubými vlakovými kilometry.

Máme tři druhy železničních tratí - E (Evropský železniční systém), C (Celostátní dráhy), R (Regionální dráhy).

$C_1$  je dáno veličinou  $S_1$  [Kč], která udává cenu za 1 km jízdy vlaku (vlkm) po trati kategorie E, C, R. Tuto hodnotu je možné najít v tabulkách.  $L_E$ ,  $L_C$ ,  $L_R$  jsou vzdálenosti [km] ujeté vlakem po tratích kategorie E, C, R.

$$C_1 = S_{1E}L_{1E} + S_{1C}L_{1C} + S_{1R}L_{1R}, \quad (5.2)$$

$C_2$  je dáno veličinou  $S_2$  [Kč], což je cena za 1000 hrubých vlakových kilometrů (hrtkm) převezených po tratích kategorie E, C, R. Opět možno najít v tabulkách.  $L_E$ ,  $L_C$ ,  $L_R$  udávají to samé, co u  $C_1$ .  $Q$  je tisícina celkové hmotnosti vlaku v tunách.

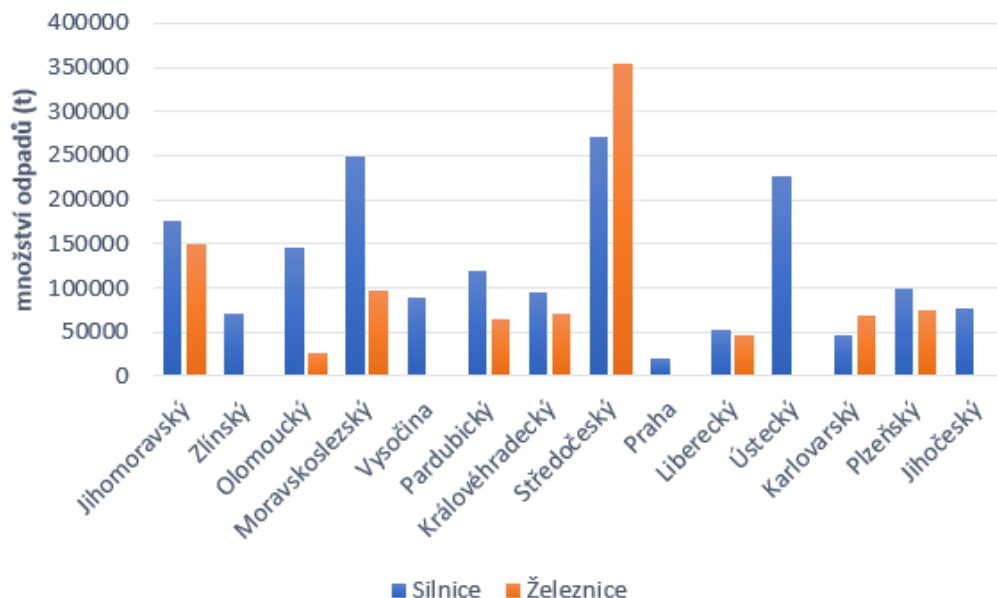
$$C_2 = S_{2E}L_{2E}Q + S_{2C}L_{2C}Q + S_{2R}L_{2R}Q, \quad (5.3)$$

Kdyby v ORP bylo množství odpadů jen o málo vyšší, než je kapacita vlaku a musel by se dokoupit další, který by nebyl plně využit, náklady by se opět skokově zvýšily. U vlaků by byl ale odskok od původní křivky daleko větší, než u automobilů. Nákup nového auta totiž stojí přibližně 3mil Kč, jen nová lokomotiva stojí 100mil Kč.

## 5.3 Aplikace na ČR

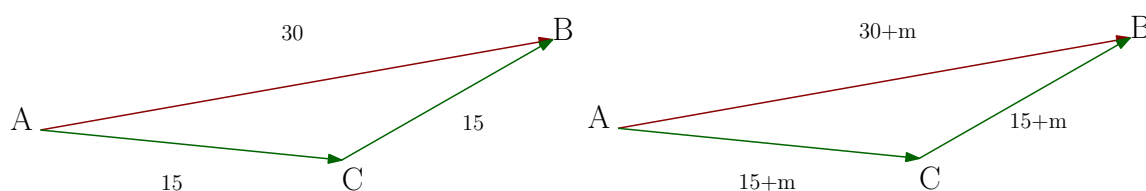
Případová studie byla provedena v detailu ORP, která obsahuje celkem 206 uzlů. Ty jsou spojeny 42230 hranami. Byly uvažovány stejné pro silniční i železniční dopravu (v realitě do 10 ORP železnice nevede). Graf ukazuje množství odpadu převezeného po silnicích nebo železnicích z ORP na území daného kraje do měst sloužících ke zpracování. Jako produkce byl uvažován SKO (produkce 2015). Kapacity vycházely ze studie MŽP 2015 s konzultací ÚPI [19]. Například Praha má o necelých 20 000 tun odpadu menší kapacitu zpracování než jejich produkci. K přepravě takto malého množství využila silnici. Pro srovnání - např.

ve Středočeském kraji je 26 ORP, v Karlovarském jen 7. Bylo uvažováno 18 nových ORP se spalovnami. V současnosti jsou v ČR 4 spalovny, což je potřeba rozšířit. Naše lokality jsou navrhované výstavby nových zařízení, která vychází ze studií, která zpracovával ÚPI pro Ministerstvo průmyslového obchodu [20]. Výsledky přepravy odpadů v závislosti na silnici/železnici pro kraje jsou ukázány na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2 Přeprava odpadů v ČR

Díky tomu, že uvažujeme spojení každého města s každým, se mohlo stát, že z ORP A do ORP B místo přímou cestou pojede nákladní automobil/vlak ještě přes ORP ležící mezi nimi (*úplný graf* - viz obrázek 5.4). Protože minimalizujeme náklady, chceme využít minimální počet hran. Proto jsme ke každé vzdálenosti přičetli  $m$ , které vyjadřuje malou hodnotu. Pokud by jel z A do C, a pak teprve do B, ohodnocení hrany by celkově vzrostlo o  $2m$ . Touto úpravou jsme tedy zmenšili počet využitých cest.



Obr. 5.3 Ukázkový graf

## 6 Diskuze

### 6.1 Cena

#### 6.1.1 Silnice

V matematickém modelu, který byl sestaven pro tuto práci, se na silnici moc nezaměřovalo a užívala se u ní pouze konstantní cena za kilometr. Kdyby se mělo pokračovat v rozvoji modelu, musela by se k této ceně přičíst ještě  $cena_{o,s}$ , která by zahrnovala všechna mýta (dálnice, rychlostní třídy, některé první třídy), mzdy řidičů, benzín/naftu a případné nákupy nových aut.

#### 6.1.2 Železnice

K částem matematického modelu, které pojednávají o železniční dopravě, by se musela přičíst  $cena_{o,z}$ , která by udávala investiční skoky v momentech překročení kapacity vlaků nebo nutnosti zaplacení penále a zahrnovala by opět i platy. Tzn. nakoupení nové lokomotivy či vagónů. Již víme, kolik stojí nová lokomotiva. Každý nový vagón stojí zhruba 3 - 5 mil Kč, což je stejně nebo i více, než jeden nákladní automobil.

### 6.2 Produkce/kapacity

V našem modelu jsme užívali roční produkce i kapacity. Je otázkou, jak by to vypadalo při například týdenních datech. Jestli by se v ORP našlo dostatečné množství odpadu tak, aby se vlaky využívaly dostatečně často a byly stále finančně výhodné. Pronajímání lokomotiv by dlouhodobě nebylo prosperující, takže by se spíš uvažovalo pořizování vlastních vlaků. Kdyby se nevyužívaly, byla by to velká finanční ztráta.

### 6.3 Čas

Také by se musel model rozšířit o omezení zahrnující čas. V případě železničních zácep by se musela vypočítat jejich četnost a průměrná doba kvůli nim strávená na silnici navíc. Ta by se převedla na kilometry, které by auto za normálních okolností na dané silnici ujelo. Tento počet kilometrů by se přičítal k délce silnice. Z hlediska mostů (tedy jejich nízké nosnosti a nízkého průjezdu) by se musely najít cesty, na kterých by se tyto překážky nevyskytovaly. Došlo by tím k prodloužení tras.

Nákladní vlaky sice dosahují na českých železnicích rychlostí jen přibližně do 100 km/h, nemusí však zastavovat v žádných zastávkách a mohou tak jet z výchozí stanice přímo do koncové. Navíc jezdí převážně v noci, což umožňuje jakousi plynulost dopravy. Noční provoz je z důvodu, že musí dávat přednost osobním a expresním vlakům. Ty končí převážně kolem půlnoci, takže potom jsou trasy volné pro nákladní vlaky. Musely by ale čekat na čas, kdy jsou tratě určeny pro jejich jízdu, což určitě nebude pokaždé ve chvíli, kdy by byl vlak dostatečně plný na to, aby mohl vyjet.



## 7 Závěr

Cílem této práce bylo studium teoretických poznatků v oblasti matematického modelování toků v síti se zaměřením na tzv. reversní úlohy, základní porozumění problematice železniční dopravy, formulace problému a návrh matematického modelu, ověření funkčnosti modelu na jednoduché úloze a testování využitelnosti modelu na reálných datech.

Teoretický úvod byl popsán v kapitolách 2 a 3. Byly zde zmíněny například zcela základní pojmy z teorie grafů, jejich reprezentace, toky v síti, dále pak lineární programování či problematika lokálního extrému.

Ve čtvrté kapitole je uvedena definice problému, na který byla práce zaměřena, a lehké nastínění charakterizace dopravních sítí, ve kterých byla teoreticky srovnána silniční a železniční síť. Následoval matematický model, ve kterém byl zkoumán cenový rozdíl mezi těmito dvěma způsoby dopravy a motivační příklad, na kterém byla pozorována řešitelnost problému.

Pátá kapitola se věnuje aplikaci na reálných datech v ČR. Charakterizace dopravních sítí je zde již popsána s reálnými daty a úloha byla rozvinuta na oblast celé České republiky. Kdybychom se pozorně podívali na množství přepravovaného odpadu po hranách, zjistili bychom, že byly určeny podmínky, za kterých je železnice preferována. Tzn., že z menších ORP, vzdálenějších od ORP se spalovnami, se převáží odpady po silnici do jednoho ORP, ze kterého se odpad do ORP s kapacitou na zpracování převáží vlaky.

V šesté kapitole jsem se zabývala zmíněním všech věcí, které jsou potřeba k sestavení ideálního modelu. Z této diskuze je vidět, že problém byl komplexní. Jeho plné zvládnutí přesahuje rámec řešené práce.

## Literatura

- [1] Plán odpadového hospodářství ČR. *www.mzp.cz* [online]. 2015 [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: [http://www.mzp.cz/cz/plan\\_odpadoveho\\_hospodarstvi\\_cr](http://www.mzp.cz/cz/plan_odpadoveho_hospodarstvi_cr)
- [2] *Zákon o odpadech a o změně některých dalších zákonů*. In: . 2002, ročník 2001, 185/2001.
- [3] *ČR nechce být skládkovací velmocí. Nový zákon o odpadech zvýší recyklaci a vytvoří 40 000 nových pracovních míst*. [online]. 2016 [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: [http://www.mzp.cz/cz/news\\_160505\\_zakon\\_odpady](http://www.mzp.cz/cz/news_160505_zakon_odpady)
- [4] *Atlas zařízení pro nakládání s odpady* [online]. 2010 [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.ekologove.cz/odpady/skladky>
- [5] ŠOMPLÁK, Radovan, Lenka SZÁSZIOVÁ, Veronika SMEJKALOVÁ, Vlastimír NEVRLÝ, Martin MÁLEK a Martin PAVLAS. *Současné toky a zpracování spalitelných odpadů v ČR*. 2017.
- [6] GAL, Pavel. *Doprava komunálních odpadů*. Brno, 2013. Bakalářská. Vysoké učení technické. Vedoucí práce Ing. Martin Pavlas, Ph.D.
- [7] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. 1. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
- [8] NEŠETŘIL, Jaroslav. *Teorie grafů*. 1. Praha: SNTL, 1979. ISBN 04-017-79.
- [9] Doc. RNDr. Jindřich Klapka, CSc., RNDr. Jiří Dvořák, CSc., RNDr. Pavel Popela: *Metody operačního výzkumu*, vydání 1., 1996, vydavatel Vysoké učení technické v Brně, Kounicova 67a, Tisk PC-DIR, spol. s.r.o. - Nakladatelství Brno, Technická 2
- [10] RARDIN, R. L. *Optimization in Operations Research*. Upper Saddle River, NJ 07458: Prentice Hall, 1998. ISBN 9780023984150.
- [11] Produkce. *www.komunalniodpad.eu* [online]. [cit. 2017-05-23]. Dostupné z: <http://www.komunalniodpad.eu/?str=produkce>
- [12] *Délky a další data komunikací* [online]. 2016 [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <https://www.rsd.cz/wps/portal/web/Silnice-a-dalnice/delky-a-dalsi-data-komunikaci>
- [13] Ing. Jiří Gregor. *Pokročilé modely logistiky v oblasti odpadového hospodářství*. Brno. Disertační. Vysoké učení technické. Vedoucí práce Prof. Ing. Petr Stehlík, CSc., dr. h. c.
- [14] *Mýto v České Republice* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: [http://www.doprava.vpraxi.cz/myto\\_cr.html](http://www.doprava.vpraxi.cz/myto_cr.html)
- [15] *Které úseky silnic I. třídy jsou zpoplatněny a proč?* [online]. 2014 [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.elektronickemytne.cz/ktere-useky-silnic-i-tridy-jsou-zpoplatneny-a-proc/>
- [16] *Výpočet čisté mzdy* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.vypocet-ciste-mzdy.cz/>

- [17] *Výroční zpráva 2015* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.szdc.cz/vz2015/szdc-vz-2015-cz-tisk-1-56cb.pdf?file=1579>
- [18] Gregor J., Šomplák R., Pavlas M., 2017, Transportation Cost as an Integral Part of Supply Chain Optimisation in the Field of Waste Management, *Chemical Engineering Transactions* 56, 1927-1932.
- [19] *Www.mzp.cz* [online]. Praha [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: [http://www.mzp.cz/cz/odpady\\_podrubrika](http://www.mzp.cz/cz/odpady_podrubrika)
- [20] Návrh optimální sítě zařízení k nakládání s odpady v rámci celé ČR včetně stanovení potřebných kapacit těchto zařízení ve všech krajích. *Www.mzp.cz* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: [http://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/projekty\\_po8\\_opzp\\_2007\\_2013/\\$FILE/OODP-1.1.2\\_MZP\\_FIN-20160810.pdf](http://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/projekty_po8_opzp_2007_2013/$FILE/OODP-1.1.2_MZP_FIN-20160810.pdf)